Herr DDDr. Franz Langmayr hat es 2014 übernommen, Auswirkungen von nicht widerspruchsfreier Existenz überabzählbarer Mengen auf andere Bereiche der Mengenlehre in einem Paper zu behandeln. Seine Arbeit zeigt viele einschlägige Zusammenhänge in einem neuen Licht. So etwa die Bereiche potenziell und aktual Unendlich. Es handelt sich um einen interessanten Diskussionsbeitrag.

**Über das Auswahlpostulat**

**Ein Diskussionsbeitrag von Franz Langmayr**

Das Auswahlpostulat lautet:

Zu jeder Menge von Mengen existiert mindestens eine Auswahlfunktion, die jeder dieser Mengen eines ihrer Elemente zuordnet.

Das Auswahlpostulat ist als Postulat per definitionem unbewiesen und wird von der Welt der Mathematik als richtig anerkannt. Es gibt jedoch insofern Anlass zu Diskussionen, als sich Auswahlfunktionen aus bestimmten überabzählbaren Mengen nicht wirklich angeben lassen. Diese Arbeit ist ein Beitrag zu dieser Diskussion.

Wir wollen hier zeigen, dass es eine unendliche Menge UB gibt, aus der praktisch nicht ein einziges Element ausgewählt werden kann. Dazu zeigen wir, dass kein Element von UB durch einen endlichen Definitionsvorgang festgelegt werden kann. Dazu führen wir eine wichtige Unterscheidung ein, die zwischen Auswahlen und Auswahlen besteht. Und zwar unterscheiden wir danach, ob die Vornahme der Auswahl eines Elementes aus einer Menge in endlich vielen Definitionsschritten geschehen kann. Und wir möchten hier nahelegen, die Auswahl eines Elementes aus einer Menge nur dann als solche anzuerkennen, wenn sie durch endlich viele Definitionsschritte festgelegt werden kann.

Sei U eine beliebige überabzählbare Menge, dann sei UA die Teilmenge genau jener Elemente von U, die durch eine endlich lange Definition eindeutig festgelegt werden können. Für diese Definition lassen wir das gesamte lateinische Alphabet plus den Zeichensatz von Mathematica 10 zu. Beliebig viele weitere Zeichen können durch Definition mit Hilfe der zunächst zugelassenen Zeichen definiert werden.

Die Menge aller solchen Definitionen ist abzählbar. Denn diese Definitionen lassen sich lexikographisch ordnen. Dazu brauchen wir nur eine lexikographische Ordnung der endlich zugelassenen Zeichen festzulegen. Weitere definierte Zeichen ordnen wir lexikographisch so ein wie deren Definitionen.

Dann sei UA die Menge aller so definierbaren Elemente von U. Obwohl es vorkommen wird, dass zwei Definitionen das selbe Element von U definieren, kann dennoch aus der Abzählbarkeit der Definitionen auf die Abzählbarkeit der durch sie definierten Elemente von U geschlossen werden.

So ist klar, dass die Menge UA abzählbar ist, daher ist die Menge UB = U - UA nicht nur nicht leer, sondern deswegen unendlich, weil wir aus einer überabzählbaren Menge U nur die abzählbare Menge UA herausgenommen haben. Es lässt sich jedoch kein einziges Element aus UB wirklich angeben, nämlich durch eine endlich lange Definition eindeutig festlegen.

Nehmen wir als Beispiel für U die überabzählbare Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Endlich definierbar sind dann alle rationalen Zahlen in U, weiters alle algebraischen und elementar transzendenten Zahlen in U. Endlich definierbar sind aber noch unendlich viele weitere Zahlen aus U. Es ist interessant anzumerken, dass auch Zahlen endlich definierbar sind, für deren Berechnung kein Algorithmus existiert. Nicht endlich definierbar sind aber Zahlen, deren Festlegung im dekadischen System durch unendlich häufige Betätigung eines zehnfächerigen Rouletts geschieht. Das Heikle daran: eine solche Definition kommt nie zu einem Ende, also nie zur endgültigen Festlegung des betreffenden Elements. Gehen wir von einer endlichen Dauer dieses Universums aus, dann wird eine solche Definition nie fertig.

Allerdings gehe ich bei den obigen Definitionen von folgendem Postulat aus: Endlich definierbar ist das und nur das, was auf die oben beschriebene Weise über das gesamte lateinische Alphabet plus den Zeichensatz Mathematica 10 definiert werden kann.

Eine vielleicht präzisere Vorgangsweise bestünde hier darin, den Element-Definitionan Gödel-Nummern zuzuordnen.

Nachdem wir gezeigt haben, dass es unendliche Mengen gibt, aus denen nicht ein einziges Element tatsächlich ausgewählt werden kann, kann auch das Auswahlpostulat in der oben angegebenen Fassung nicht aufrecht erhalten werden. Die Auswahlfunktion existiert jedenfalls dann nicht, wenn sich in der Menge von Mengen, von der wir ausgehen, mindestens eine Menge befindet, von der in der beschriebenen Weise nicht ein einziges Element tatsächlich durch endlich lange Definition ausgewählt werden kann.

Diesem Ergebnis entsprechend sind nun alle jene Sätze einzuschränken, die auf der vollen Anerkennung des Auswahlpostulats beruhen. Dazu gehören: Das Lemma von Kuratovski-Zorn, das Lemma von Teichmüller-Tuckey, der Satz von Hausdorff-Birkhoff, der Satz von Hahn-Banach und der Wohlordnungssatz. Insbesondere liegt der Schluss nahe, dass keine Menge wohlgeordnet werden kann, aus der sich nicht ein einziges Element durch endlich lange Definition auswählen lässt.